

الحاضرة الثالثة عشر

مقدمة

إذا كان الفضاء الهنولوجي لا محدوداً ثانياً فإنه يمتلك
 مجموعة كثيفة فائقة للحدس أي أنه مغلق.

البرهان

الحالة X محدوداً ثانياً وبالتالى بالتعرف يمتلك فائقة فائقة
 للحدس ولتكن أسرة لمجموعات طيفية $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
 تتألف من كل مجموعة U_n نقطة x فتصل على المجموعة
 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ وهي مجموعة فائقة، وهذه المجموعة
 كثيفة في X وفقاً مع جميع المجموعات المفتوحة غير الفائقة
 وهي المطلوب.

مجموعات الفاصل

هناك عدة مجموعات للفاصل منها:

1. مجموعة الفاصل الصغرى T_0

هي أنه ما وجد أي نقطتين مختلفتين من الفضاء الهنولوجي،
 يوجد بينهما جوار لا يحتوي لنقطة الأخرى.

أي الفضاء الذي يحقق هذه المجموعة يسمى « T_0 -فضاء».

أو فضاء كلما عروف.

مثال

أبني لنا الفضاء $X = \{a, b\}$ ، $T = \{\emptyset, X\}$

فهذا الفضاء له جوار وهو X الفضاء غير متقطع

وكذلك a و b ليس X ليس T_0 -فضاء

وبالتالى هذا الفضاء ليس T_0 -فضاء

مبرهنة

بما أنه توجد مقادير لـ T_0 مقادير، بالتعريف، هي
 يمكن تلافيه أن المقادير لـ T_0 لـ T_0 المقادير
 من المقادير، لـ T_0

مثال

ليكن لدينا المقادير $X = \{a, b\}$ ، $T = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

هذا المقادير T_0 مقادير لـ T_0

لكن أن نلاحظ أن المقادير لـ T_0 المقادير لـ T_0
 تلافيه أن a غاك هو $\{a\}$ لـ T_0 المقادير T_0

للمقادير T_0 مكافئات سنذكر أمثلة من المقادير لـ T_0

مبرهنة

ليكن X مقادير T_0 مقادير، أن المقادير T_0 مكافئات

1- X هو T_0 مقادير

2- $\{x\} + \{x\} = \{x\}$ من المقادير T_0 المقادير T_0

البرهان:

1 ← 2 نفرض $x + y \in X$ بموجب ما كان x فرضاً

جواب لا يحوي النقطة y لهذا يعني ان النقطة x لا تنتمي الى

لمجموعة y

ولكن x تنتمي الى لمجموعة x $\leftarrow x \in \{x\}$

لمجموعة x + لمجموعة y $\{x\} + \{y\}$

2 ← 1 نفرض $\{x\} + \{y\}$ ، نفرض ان النقطة x

ليست T_0 ، لهذا يعني ان اي مجموعة x تحوي y وان يكون y

حوي x

هذا يعني ان لمجموعة x تحتوي في لمجموعة y $\{x\} \subseteq \{y\}$

و لمجموعة y $x \sim x \sim y$ $\{y\} \subseteq \{x\}$

$\leftarrow \{x\} = \{y\}$ ، لهذا يتحقق المفرض المطلوب.

* العودة للمالبين السابقين :

لما $\{a\} = X$ ، $\{b\} = X$

لما المقادير ليست T_0 ، بينما لدينا $X = \{a, b\}$

و $T = \{\emptyset, \{a\}, X\}$

لما يعني ان $\{a\} = X$ و $\{b\} = b$ لان كل نقطة

لمجموعة المجموعة هي x لا تسادي لمجموعة المجموعة هي x

2. مجموعة أفضل الأعداد T_1

وهي من أجل أي نقطتين مختلفتين من فضاء هيلبرت \leftarrow

يوجد للأفضل من هيلبرت لا تحتوي النقطة الأخرى.

أيضا، الفضاء الذي تحققت هذه المجموعة نقطة على T_1 فضاء

\leftarrow ينتج من هذا التعريف أن مجموعة أفضل هيلبرت \leftarrow

ينتج من مجموعة أفضل الأعداد.

أي أن كل T_1 فضاء هو T_1 والذي يرمز به

مثال 1

لنأخذنا $X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ، هذه الفضاء هو T_1 فضاء

لأنه ليس T_1 فضاء.

لأنه أي جوار $\{a\}$ (الذي هو $\{a\}$ فقط) يحتوي a

مثال 2

لنأخذ الفضاء المتقطع (X, τ) τ هيلبرت القوي.

هذه الفضاء هو T_1 فضاء.

لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين (x, y) \leftarrow يوجد x جوار

هو $\{x\}$ لا يحتوي y (لأن كل المجموعات مغلقة)

ويوجد جوار y هو $\{y\}$ لا يحتوي x

مثال 3

مثلاً لنأخذنا R مجموعة الأعداد الحقيقية إلى الألف.

المجموعات المتكوبة $\mathcal{A} = \{U \mid \emptyset \in U, U \subseteq R\}$

والمجموعات المغلقة هي التي تكونها

جوار y ؟ جوار x ؟ جوار x ؟ جوار x ؟

وكونه لشيء x في A هو $\{x\}$

$x \neq y \Rightarrow \{x\} \neq \{y\}$

في أي مجموعة R تحتوي الدالة (العلاقة الثنائية)

في المقادير T_1 المقادير T_2 وهو $T_1 \times T_2$

* للعقد T علاقات عدة وسوف نأخذ أهمها:

معرفة:

ليكن X مجموعة دلالية، والناتج X لعلاقة الثنائية R على X هو:

$X = \{x \mid \exists y, x R y\}$

المجموعة X هي صورة x في $\{x\}$ علاقة R ، حيث $x \in X$

البرهان:

1. $x \in X$ يعني $\exists y, x R y$ ولشئ x في المجموعة $\{x\}$ علاقة R

والاستنتاج $x \in X \mid \exists y, x R y$ مجموعة X

2. $x \in X$ يعني $\exists y, x R y$ و $y \in X$ يعني $\exists z, y R z$

وهذا التعريف (بمجموعة X لا تحتوي y)

نلاحظ أن X مفتوح

$$X \mid \{x\} = \bigcup_{y \neq x} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \neq x} X \subseteq X \mid \{x\}$$

وهذا الذي هو مجموع X في علاقة R

في اتحاد المجموعات مفتوحة \Rightarrow هي مجموعة مفتوحة \Leftarrow

والنتيجة $\{X\}$ علاقة

2 \Leftarrow 1

سلسلة: $x \in X$ يعني $\exists y, x R y$ ولشئ x في المقادير T_1 المقادير T_2

$x \neq y \Rightarrow \{x\} \neq \{y\}$ علاقة R هي مجموعة مفتوحة

$x \in X$ يعني $\exists y, x R y$ و $y \in X$ يعني $\exists z, y R z$

وبالمثل $\{y\}$ علاقة R هي مجموعة مفتوحة $x \in X$ يعني $\exists y, x R y$

SBC

دعني $x \in X$ يعني $\exists y, x R y$ و $y \in X$ يعني $\exists z, y R z$

← فإنه الفضاء هو T_1 مقام

تسمية مباشرة

أي مجموعة منتهية في T_1 مقام هي مجموعة منتهية

تجربين

ليكن X هو T_1 مقام، A منتهية، x عنصر لا ينتمي إلى A ($x \notin A$)
عندها يوجد للعنصر x لا يتقاطع مع A
الكل.

لنأخذ المجموعة المنتهية $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

و ليكن $x \notin A$

← يوجد جوار \mathcal{U}_1 لـ x لا يحتوي على a_1

" " " " \mathcal{U}_2 لـ x لا يحتوي على a_2 ، هكذا

" " " " \mathcal{U}_n لـ x لا يحتوي على a_n

← الآن لنأخذ التقاطع

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{U}_i$$

وهو جوار لـ x ولا يتقاطع مع A

مباشرة

ليكن (X, T_1) مقام، $A \subseteq X$ و $x \in X$

← تكون النقطة x نقطة تراكم للمجموعة A إذا وفقط إذا

كان يوجد جوار لـ x يتقاطع مع A بعدد غير منته من العناصر

الديكارتية

إذا كان أي جوار لنقطة x يحتوي على عدد لا نهائي من العناصر (A)

فمن ذلك أنه النقطة x هي نقطة تراكم.

والعكس بالعكس.

تكون المجموعة مغلقة إذا كان \mathcal{A} مستقلاً

والذي بالأساس لفرض أنه نقطة تراكم

ولفرض x أنه يوجد U للنقطة x مثل $U \cap A \neq \emptyset$

$$U \cap A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

عندئذ x بالقرينة U ليس هو x بل x حيث أن

$$(U \cap A) \cap U = A \cap (U \cap U)$$

أي أنه يكون مستقلاً مع U أو يكون التقاطع هو x عن طريق

$$U \cap (U \cap A) = \{x\} \text{ أو } \emptyset$$

$$U \cap U \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$$

مع x ليست نقطة تراكم، وهذا يناقض

الفرض الأول، فافترض

أن x هو x x يحتوي على عدد لا نهائي من عناصر المجموعة X

ولذلك

في الواقع T تكون النقطة اللامتناهية المجموعة إما نقطة تراكم

أو نقطة منعزلة

أيها الطالب